КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕПЛОФИЗИКИ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

3D моделирование физических процессов

Методы представления ДУ в конечных разностях.

Лектор: PhD
Максимов Валерий Юрьевич

Вопросы по предыдущей лекции:

1. Какое ДУ является линейным?
2. Какое ДУ является однородным?
3. Как определяется порядок ДУ?
4. Какие типы ДУ II порядка Вы знаете?
5. Чем отличается равномерная сетка от неравномерной?
6. Что такое «сеточная функция»?
7. Что такое «конечно-разностная схема»?
8. Что такое «шаблон»?

1. Метод разложения в ряд Тейлора

Первая производная

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_i (x_{i+1} - x_i) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i (x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i (x_{i+1} - x_i)^3 + \textbf{ЧВП}$$

$\Delta x = x_{i+1} - x_i$, $f_{i+1} = f(x_{i+1})$, $f_i = f(x_i)$, $f_{i-1} = f(x_{i-1})$

$$f_{i+1} = f_i + \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \underbrace{\frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \textbf{ЧВП}}_{O(\Delta x^2)} \quad \textbf{(1)}$$

ЧВП – члены более высоких порядков

O(Δx²) означает, что наименьший порядок всех следующих слагаемых равен двум; остальные слагаемые имеют больший порядок малости.

(1) $$f_{i+1} = f_i + \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + O(\Delta x^2)$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\boxed{\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}}$$

Конечно-разностное соотношение «вперед»

или **(2)**

правосторонняя конечно-разностная аппроксимация

Выражение (2) имеет первый порядок точности

$$f_{i-1} = f_i - \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \underbrace{\frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 - \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \text{ЧВП}}_{O(\Delta x^2)} \qquad (3)$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\boxed{\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}} \qquad (4)$$

Конечно-разностное соотношение «назад»

или

левосторонняя конечно-разностная аппроксимация

Выражение (4) имеет первый порядок точности

$$f_{i+1} = f_i + \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \text{ЧВП} \qquad (1)$$

$$f_{i-1} = f_i - \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 - \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \text{ЧВП} \qquad (3)$$

(1)-(3):

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2\left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \underbrace{\frac{1}{3}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \text{ЧВП}}_{O(\Delta x^3)}$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$\boxed{\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}} \qquad (5)$$

***Центральное* конечно-разностное соотношение**

Выражение (5) имеет второй порядок точности

Вторая производная

$$f_{i+1} = f_i + \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \frac{1}{24}\left.\frac{d^4 f}{dx^4}\right|_i \Delta x^4 + ЧВП$$

$$f_{i-1} = f_i - \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 - \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \frac{1}{24}\left.\frac{d^4 f}{dx^4}\right|_i \Delta x^4 + ЧВП$$

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \underbrace{\frac{1}{12}\left.\frac{d^4 f}{dx^4}\right|_i \Delta x^4 + ЧВП}_{\boldsymbol{O(\Delta x^4)}}$$

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i = \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\boxed{\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{\Delta x^2}} \qquad (6)$$

Выражение (6) имеет второй порядок точности

Геометрическая интерпретация

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = tg\alpha^*$$

$$tg\alpha_1 = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

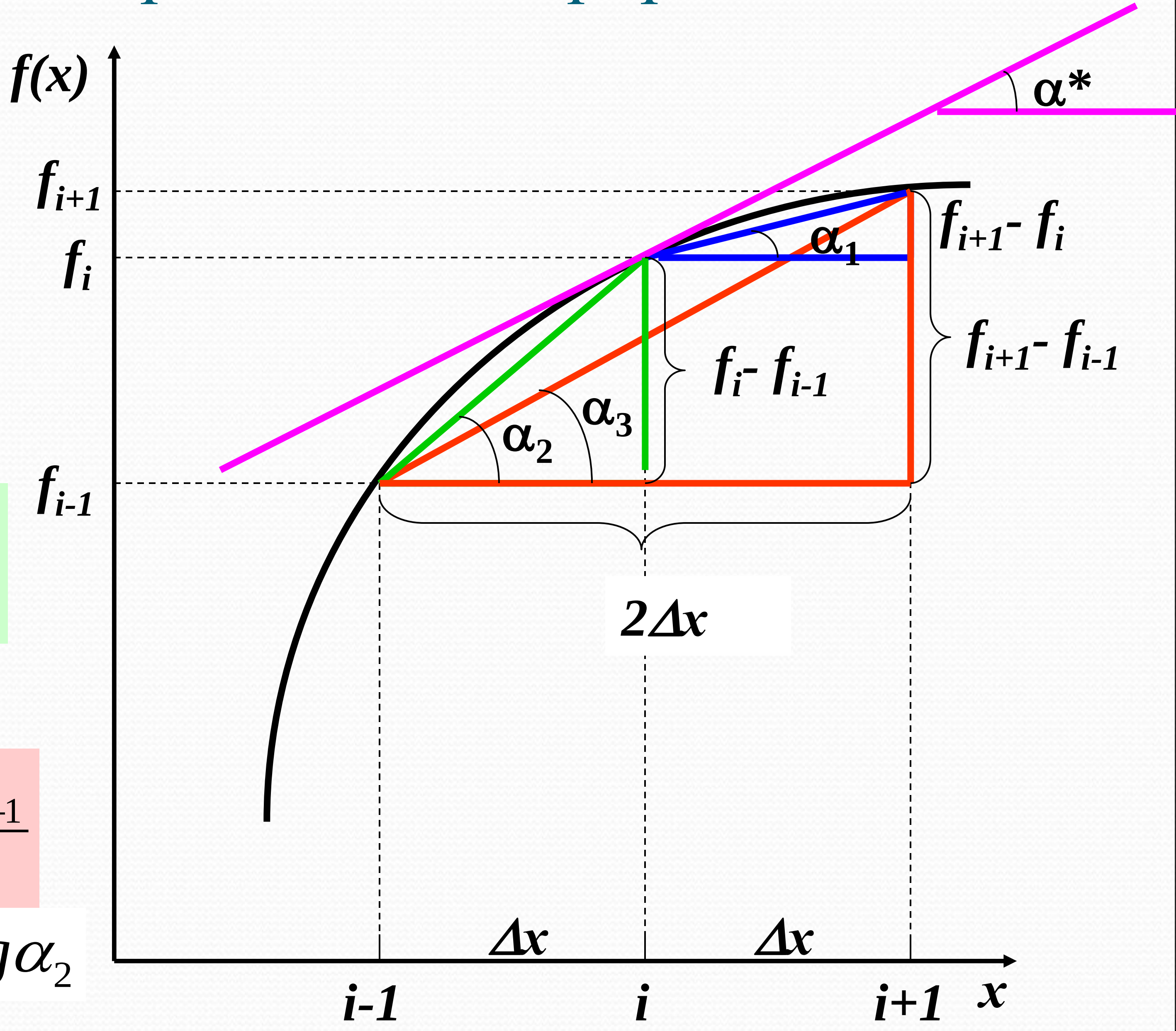
$$tg\alpha_1 < tg\alpha^*$$

$$tg\alpha_2 = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$$

$$tg\alpha_2 > tg\alpha^*$$

$$tg\alpha_3 = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$tg\alpha_1 < tg\alpha_3 < tg\alpha_2$$



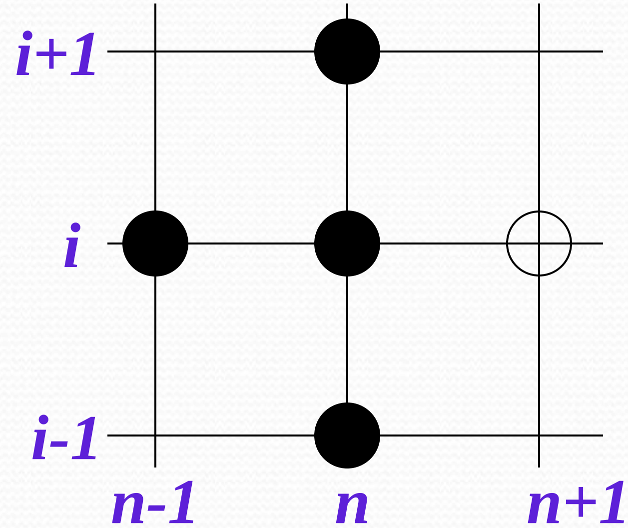
Частные производные

$f_{i,j} = f(x_i,y_j)$, $f_{i,j,k} = f(x_i,y_j,z_k)$, $f^{n}_{i,j,k} = f(t_n,x_i,y_j,z_k)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

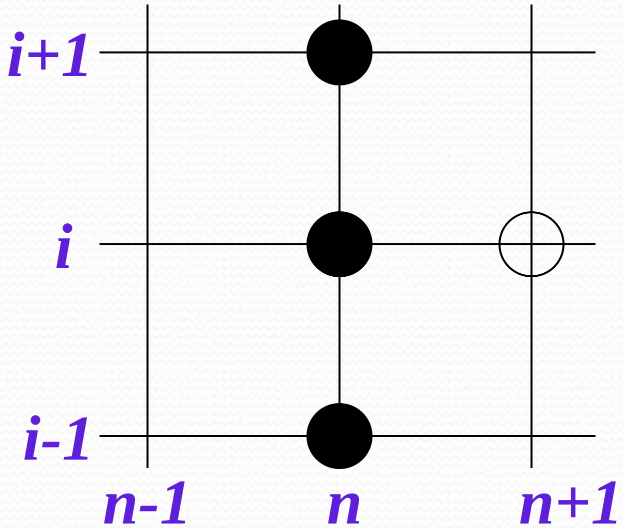
$f_i^{\,n} = f(t_n,x_i)$



КРС (7) трехслойная, пятиточечная, второго порядка точности по всем переменным

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} + u\frac{f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}}{2\Delta x} = a\frac{f_{i+1}^{n} + f_{i-1}^{n} - 2f_i^{n}}{\Delta x^2} \qquad (7)$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n}}{\Delta t} + u\,\frac{f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}}{2\Delta x} = a\,\frac{f_{i+1}^{n} + f_{i-1}^{n} - 2f_i^{n}}{\Delta x^2} \qquad \textbf{(8)}$$



КРС (8) двухслойная, четырехточечная, второго порядка точности по пространственным переменным и первого порядка точности по времени.